Berechnung der Gravitationskonstante G
Calculation of the Gravitational Constant

Das Gravitationsgesetz besagt, daß sich alle Massen gegenseitig anziehen, daß diese Kraft dem Produkt der Massen proportional ist und indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung zwischen den Massen. Die Gravitationskonstante macht aus dieser Beziehung eine Gleichung, sie zählt zu den wichtigen universellen Naturkonstanten. Zur Ermittlung der auch nach Newton benannten Konstante wurden in der Vergangenheit ausschließlich mechanische Verfahren benutzt, die vielen Störgrößen unterliegen, weshalb G bisher als Konstante mit großer Ungenauigkeit gilt.

Vergleichsweise ist die Unsicherheit einer Berechnung lediglich durch die Genauigkeit der dabei verwendeten Naturkonstanten bedingt. In der Vergangenheit gab es diverse ergebnislose Versuche zur rechnerischen Bestimmung von G [1]. Im folgenden zeigt der Autor auf Basis der in [2], [3] geschaffenen theoret. Grundlagen eine neue Möglichkeit zur rechnerischen Bestimmung der Gravitationskonstante.

Durch Berechnungen rückt eine Reduzierung der Unsicherheit von G um mehrere Zehnerpotenzen in greifbare Nähe. Zunächst erscheint die Ermittlung mittels zwei im Abstand r gegenüberstehenden Elektronen naheliegend. Analog zum Coulombschen Gesetz, bei dem sich Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen anziehen, läßt sich Gravitation als Anziehung entgegengesetzter Pole verstehen, wobei sich Coulombkraft Fc und Gravitationskraft Fg nach Betrag stark unterscheiden:

```
Fc= 1/ (4*pi*eps0) * e^2/ r^2       = 2.307077 *10^-22 N
Fg= G* me^2/ r^2                    = 5.536972 *10^-65 N
Fc/Fg= 1/(4*pi*eps0) *(e/me)^2 /G   = 4.166E+42
```

Der Quotient Fc/Fg wird auch als Eddington’s Zahl bezeichnet und selbst für Feynman hatte das Kräfteverhältnis zwischen zwei wechselwirkenden Elektronen große Bedeutung. Der Quotient Fc/Fg kann durch den Term N^2/24 ersetzt werden, wobei N als Large Number bezeichnet wird [2]. Zunächst wird von dem 1986 vom internationalen Codata- Komitee anerkannten G= 6.67259(85) *10^–11 [m^3/kg/s^2] ausgegangen [4].

```
Fc/Fg= N^2/24= 1/(4*pi*eps0) *(e/me)^2 /G
N= sqr(24*(e/me)^2/(4*pi*e0*G))    = 1.000001155E+22              (1)
```

Das Ergebnis läßt erkennen, daß es sich bei der Large Number N um eine große Zahl mit dem Betrag von etwa 1*10^22 handelt. 1986 waren Angaben wie G= 6.672605E-11 typisch, wobei die Large Number mit

N= 1*10^22 ohne nähere Begründung vorausgesetzt wurde [3]. Der Zusammenhang zwischen Masse und Naturkonstanten wird durch die folgende Beziehung definiert, wobei Planckmasse Mo ohne pi/2 Planck´s Intention von 1900 entspricht. Z0 ist der Wellenwiderstand des Vakuums [3].

kg= (10^7A/V)*(2*Alpha/3)*Mo*Z0

Diese Gl. stellt die Verbindung zu weiteren Naturkonstanten her, ihre Erweiterung bietet die Möglichkeit der Ermittlung von G0 als Grundlage für Ausgangsdaten zur Bestimmung der Large Number N0. In der Folge wird für die Feinstrukturkonstante Alpha der Buchstabe b verwendet.

```
kg*m/s    =  4*pi*2/3*b*c* sqr(h*c/G)
(kg*m/s)^2= (4*pi*2/3*b*c)^2 *h*c/G
G0 = 64/9*pi^2*b^2*h*c^3  /(kg*m/s)^2   = 6.672460436911E-11      (2)
G0 =   m^2*kg/s *m^3/s^3  /(kg*m/s)^2   = [m^3/kg/s^2]
```

Der Index 0 bei G0 bezieht sich auf die Zugrundelegung des Wertes für weitere Berechnungen. Nach Umformung von Gl.(1) erhält man

G= 24/(4*pi*e0) *(e/me)^2 /N^2

Und durch Substitution von e^2= 4*pi*e0*c^2*me*re entsteht daraus die absolute Minimalvariante einer Gleichung zur Berechnung von G:

```
G= 24*c^2*re/(me*N^2)    [m^3/kg/s^2]                            (3)
```

Durch Gleichsetzung der Gl.(3) mit Gl.(2) kann N gewonnen werden:

```
c^2*re/me *24/N^2 = 64/9*pi^2*b^2*h*c^3     /(kg*m/s)^2
N0= 3/8*sqr(24*re/(c*h*me)) /(pi*b)         *(kg*m/s)
N0= 3/4/(pi*b) *sqr(6*re/(c*h*me)) *(kg*m/s)= 1.000010863884E+22  (4)
N0= sqr(m *s/m *s/kg/m^2 /kg)  *kg*m/s      = dimensionslos
```

Der Index bei N0 weist auf die Grundlage für weitere Berechnungen hin. Die rel. Unsicherheit von N0^2 ist durch die Unsicherheiten der beteiligten Konstanten mit re ± 6.8E-10, h ± 1.2E-8 und me ± 1.2E-8 bedingt, deren Summe ± 2.5E-8 beträgt. Von Codata wurden im Zeitraum von 1986 bis 2014 folgende verbindliche Werte zu G veröffentlicht:

Tabelle I

Codata value	Unsicherheit	Datum
G1= 6.67259E-11	± 1.3E-4	1986
G2= 6.673E-11	± 1.5E-3	1998
G3= 6.6742E-11	± 1.5E-4	2002
G4= 6.67428E-11	± 1.0E-4	2006
G5= 6.67384E-11	± 1.2E-4	2010
G6= 6.67408E-11	± 4.7E-5	2014

Die Angaben zeigen, daß G im Jahre 2006 ein Maximum erreichte, das in den darauf folgenden Jahren wieder etwas abflachte. Der Gedanke war geboren, diesen abnehmenden Trend auf die Elektronmasse me zu beziehen, welche sich nach der umgeformten Gl.(3) aus den Jahresangaben zu G ergibt, also me= 24*c^2*re/(G*N^2). Diese Werte wurden zur präzisen Auswertung auf die in Gl.(2) und Gl.(4) angegebenen Werte G0 und N0 bezogen. Damit ergeben sich folgende Abweichungen für die einzelnen Jahreswerte:

Tabelle II

G0 = 6.6724604E-11	me- bezogene Abweichungen	
Abw= c^2*re/G0 *24/N0^2 /me	= 0.000	Bezug
Abw= c^2*re/G1 *24/N0^2 /me	= -0.194E-4	1986
Abw= c^2*re/G2 *24/N0^2 /me	= -0.808E-4	1998
Abw= c^2*re/G3 *24/N0^2 /me	= -2.606E-4	2002
Abw= c^2*re/G4 *24/N0^2 /me	= -2.726E-4	2006
Abw= c^2*re/G5 *24/N0^2 /me	= -2.067E-4	2010
Abw= c^2*re/G6 *24/N0^2 /me	= -2.426E-4	2014

Aus diesen auf die Elektronmasse bezogenen Abweichungen wurde abgeleitet, daß die von Codata angegebene G- Zunahme auch auf eine durch Gl.(3) gegebene me- Abnahme zu erklären ist. Es gestaltete sich als schwierig, die einzige dafür infrage kommende Ursache zu finden. Im Zeitraum zwischen 1986 und 2014 reduzierten sich die von Codata für me angegebenen Massen mit dme/me= -6.74*10^-7 auf vernachlässigbare Weise. Es konnte sich also nur um einen Kardinalfehler bei der Ermittlung von G um 1986 handeln, der im Verlauf von Jahren beseitigt wird. Erste Anhaltspunkte ergaben sich aus dem in Fachliteratur viel diskutierten Einfluß der Mitbewegung des Protons beim Wasserstoffatom.

Ein endlich schwerer Kern bewegt sich unter dem Einfluss der Masse des Elektron um den gemeinsamen Schwerpunkt, was für die Rydberg-Konstante Ry Korrektur der Form Ry(real)= Ry/(1+ me/mH)= -5.4*10^-4 zur Folge hat. Gleichzeitig erhöht sich die Masse des Elektron durch seine relativist. Umlaufgeschwindigkeit v/c= 3.6*10^-3, was den Einfluß weiterer, nur unvollständig zu erfassender, Größen aufzeigt [5].

Die Reduzierung der Rydbergkonstante von Ry auf Ryr gilt auch für die Masse des Elektron, da auch gilt: me(real)/me= 1/(1+ me/mH)= -5.4E-4. Zur Ermittlung der real wirksamen Rydbergkonstante Ryr wird die von Codata in [6] genannte hydrogen transition frequency zugrunde gelegt: vH(1S1/2- 2S1/2)= 2.4660614131870E+15 ± 4.2 Hz (71). Damit ergibt sich die real wirksame Rydbergkonstante Ryr:

Ryr= 2.4660614131870E+15 Hz /c *4/3 = 10967860.58657 [1/m]
Ryr= 1.0967860586570E+7 ± 1.8* 10^-15 [1/m]
Ry = 1.0973731568508e+7 ± 5.9* 10^-12 [1/m]

Die Rydbergkonstante Ry gilt als genaueste Naturkonstante überhaupt. Der dimensionslose Quotient Q zwischen ihr und der real wirksamen Rydbergkonstante ist Dreh- und Angelpunkt der Berechnung, er beträgt

Q= sqr(Ryr/Ry)= 0.9997324625913 ± 3.0E-12 (5)

Die Differenz Q= sqr(Ryr/Ry) -1 = -2.675374E-4 entspricht der in der Tabelle II dargestellten me- bezogenen Abweichung. Der Vergleich zeigt, daß durch den Quotient die angesprochenen Probleme bei der Nachbildung korrekter Verhältnisse beim H- Atom und ebenfalls bei der Ermittlung von G nach Gl.(3) überwunden werden können. Auf dieser Basis läßt sich die Gravitationskonstante mit den Gleichungen (3), (4), (5) berechnen.

N0 = 1.000010863884E+22
N0^2= (1.000010863884E+22)^2 ± 2.5E-8
Q = 0.9997324625913 ± 3.0E-12

G = 24*c^2*re/(me*N^2)
Gneu= 24*c^2*re/(me*Q*N0^2) = 6.67424604E-11 [m^3/kg/s^2] (6)

Nunmehr wird untersucht, welche Abweichungen zuverlässige Angaben zu G aus der Literatur gegenüber dem berechneten Wert Gneu haben. Dazu werden in Tabelle III zunächst nur glaubhafte Werte zum Vergleich herangezogen, auch wenn sie teilweise mehrere Jahre zurückliegen:

Tabelle III

Nennwert	Unsicherheit	Herkunft	Jahr	Quelle
Ga= 6.67425E-11	± 1.26E-5	G World	1997	[7]
Gb= 6.674215E-11	± 1.38E-5	Uni Washington	2000	[7], [4]
Gc= 6.67435E-11	± 1.9E-5	UCI-14 Input	2014	[6]
Gd= 6.67408E-11	± 4.7e-5	Codata values	2014	[6]

Wie folgende Tabelle IV zeigt, liegen alle Abweichungen dieser Werte gegenüber dem berechneten Wert Gneu= 6.67424604E-11 innerhalb der von den Autoren angegebenen Unsicherheit. Das Verhältnis von berechneter Abweichung zu Unsicherheit beträgt weniger als eine Standardabweichung.

Tabelle IV

Quotient	Abweichung	Abw./Unsicherheit
Ga/Gneu -1	+ 5.922E-7	0.047
Gb/Gneu -1	- 4.651E-6	0.337
Gc/Gneu -1	+ 1.557E-5	0.797
Gd/Gneu -1	- 2.487E-5	0.529

Ein Ergebnisvergleich der im Jahre 2002 modernsten Angaben nach [7], Tabelle 7.5 mit Gneu zeigt, daß alle darin angegebenen Toleranzen eingehalten werden. Anders ist es bei den von Codata in [6] Table XV gemachten Angaben zu G, wo von 14 Literaturstellen lediglich die folgenden 5 die ihnen zugeordneten Fehlertoleranzen einhalten:

Bagley and Luther (1997) LANL-97	6.67398E-11/Gneu	-1 = -3.98E-5
Gundlach and Merkowitz (2000, 2002)	6.674255E-11/Gneu	-1 = +1.34E-6
Kleinvoß, Kleinvoß et al. (2002)	6.67422E-11/Gneu	-1 = -3.90E-6
Schlamminger et al. (2006) UZur-06	6.67425E-11/Gneu	-1 = +5.92E-7
Newman et al. (2014) UCI-14	6.67435E-11/Gneu	-1 = +1.55E-5

Table XV läßt erkennen, daß von Codata zu G angegebene Werte zum Teil großen Abweichungen unterliegen. Das wird deutlich bei Verwendung des Mittelwertes der 14 enthaltenen Werte mit G= 6.673671E-11 anstelle von Gneu, wobei nur 4 von 14 Werten im angegebenen Toleranzbereich liegen.

Zur praxisnahen Berechnung von G ist die Zusammenfassung der unter Gl.(4) und Gl.(5) genannten Ergebnisse zu einer Konstante K sinnvoll.

K= (1.000010863884E+22)^2 *0.9997324625913
K= N0^2*Q= 9.997541846643E+43 ± 2.5E-8 (7)

Aus der abs. Minimalvariante Gl.(3) lassen sich weitere Gleichungen ableiten, indem der Elektronradius re einmal durch die Beziehung re= b*Lc/(2*pi) und andermal durch die Beziehung re= b^3/(4*pi*Ry) ersetzt wird:

Gneu= 24*c^2*re/(me*K) = 6.67424604E-11 ± 3.7E-8 [m^3/kg/s^2]
Gneu= 12*b*c^2*Lc/(pi*me)/K = 6.67424604E-11 ± 3.7E-8 [m^3/kg/s^2]
Gneu= 6*c^2*b^3/(pi*me*Ry)/K = 6.67424604E-11 ± 3.7E-8 [m^3/kg/s^2]

Die Unsicherheit bei der Berechnung von G wird vorwiegend durch N0^2 nach Gl.(4) bzw. die Konstante K ± 2.5E-8 nach Gl.(7) bestimmt. Dazu kommt bei Gl.(3) noch die Unsicherheit der Elektronmasse me ± 1.2E-8. Die Ungenauigkeit der noch beteiligten Konstanten kann vernachlässigt werden. (b ± 2.3E-10, Lc ± 4.5E-10, re ± 6.8E-10). Die Unsicherheit der Elektronmasse me bestimmt also den Gesamtfehler der G- Berechnung.

Eigentliche Ursache der Ungenauigkeit von me ist die zugrundeliegende Avogadro- Konstante mit NA ± 1.2E-8, wodurch eine weitere Erhöhung der Genauigkeit von G begrenzt wird. Prinzipiell ist die Genauigkeit von G auf das 3-fache der für NA geltenden Unsicherheit begrenzt. Durch SI-Bestrebungen ist Angleichung auf NA= 6.022140758E+23 ± 1.0E-8 [1/mol] geplant [8], was künftige Genauigkeits- Grenzen von G deutlich macht.

DAS G- FELD IST ENERGIE ! FOLGLICH EXISTIERT KEIN „LEERER“ RAUM. AUCH DAS ELEKTRON LIEFERT SEINEN BEITRAG..... (M. Geilhaupt)

Den Berechnungen liegen folgende Naturkonstanten zugrunde:

b =	7.297352568653E-3	Alpha
c =	2.99792458E+8	[m/s]
h =	6.626070153139E-34	[J*s]
Lc=	2.426310238167E-12	[m]
me=	9.109383707749E-31	[kg]
NA=	6.022140758E+23	[1/mol]
re=	2.817940325365E-15	[m]
Ry=	1.097373156852E+7	[1/m]

Literaturangaben

---

[1] E. Suckert: Über Natur des Elektrons und Ursache der Gravitation 2013
[2] Prof. Dr. Manfred Geilhaupt: Fundamental Unit Momentum 1986
[3] Prof. Dr. Manfred Geilhaupt: Basic Units of Physics 1984
[4] Prof. Dr. Wolschin: Schwierige Bestimmung einer Naturkonstante 2001
[5] Samuel Miesch: Atomare Spektren - Bohrsches Atom- Modell 2003
[6] CODATA: Recommended Values of the Fundamental Physical Constants 2014
[7] Ulf Kleinevoß: Bestimmung der Newtonschen Gravitationskonstante 2002
[8] David Newell: The CODATA 2017 values for the revision of the SI 2018

Dipl.-Ing. (FH) Kurt Vogel

Datum: 30.04.2019